KÉT VÉGTELEN SZÁMOSSÁG ÉS MEGLEPŐ KAPCSOLATUK

SOUKUP DÁNIEL TAMÁS

Már a 17. században Galileo Galilei elgondolkozott azon, hogyan hasonlíthatnánk össze végtelen halmazok méretét. Közel négyszáz évvel később, 2017 nyarán, a Budapesten megrendezett hatodik Európai Halmazelmélet Konferencián egy fiatal modellelmélész, Maryanthe Malliaris, és a veterán polihisztor, Saharon Shelah vehette át a Hausdorff-medált, melyet az elmúlt öt év legmeghatározóbb halmazelméleti eredményéért ítélnek oda. Malliaris és Shelah jelentős áttörést értek el egy modellelméleti klasszifikációs problémával kapcsolatban, és egyben belátták, hogy két sokat vizsgált és különbözőnek sejtett végtelen számosság, $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{t}$, valójában egyenlőek. Ez utóbbi eredmény jelen ismeretterjesztő cikkünk témája.

S. Shelah és M. Malliaris középen
(Joan Bagaria fotója)

Galilei példájában a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazát veszi és a négyzetszámokat $\{1, 4, 9, 16 \dots\}$. Az első érvelés szerint a két halmaz ugyanakkora: mivel minden négyzetszámhoz pontosan egy pozitív gyök tartozik, és minden természetes szám előfordul valamely négyzetszám gyökeként, ezért ugyanannyi természetes szám kell, hogy legyen, mint négyzetszám. Másrészről, rengeteg természetes szám nem négyzetszám, olyannyira, hogy a négyzetszámok aránya nullához tart a természetes számok között, ahogy nagyobb és nagyobb intervallumokat tekintünk. Galilei ezt egy olyan paradoxonnak könyvelte el, ami megakadályozza, hogy végtelen halmazokat összemérjünk [5].

Georg Cantor a következő, mára általánosan elfogadott, definícióval állt elő az 1870-es években: két tetszőleges halmaz *azonos számosságúak* pontosan akkor, ha elemeik között létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Tehát Galilei első érvelése pont azt mutatja, hogy $\mathbb{N}$ és a négyzetszámok halmaza azonos számosságúak. Azokat a halmazokat, melyek a természetes számokkal azonos számosságúak, *megszámlálhatóan végtelennek* nevezzük és méretüket $\aleph_0$-val jelöljük (ejtsd "alef nulla"), utalva arra, hogy ez a legkisebb végtelen számosság.

Cantor egyik nagy hozzájárulása a logika fejlődéséhez, hogy Galilei észrevételét nem feloldhatatlan ellentmondásként kezelte, hanem a fenti definíció alapján nekilátott egy gazdag elmélet kidolgozásához. Első lépésként azt bizonyította, hogy a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza is megszámlálható, majd a valós számok $\mathbb{R}$ halmazát tekintette: lehetséges, hogy $\mathbb{R}$ is megszámlálható? Cantor szerint, akárhogy is vesszük valós számok egy $x_1, x_2, x_3 \dots$ listáját, mindig találunk olyan y számot, ami nem szerepel a listán. Hiszen ha y az a valós szám, ami az első tizedes helyén eltér x_1 első tizedes jegyétől, a második tizedes helyén eltér x_2 második tizedes jegyétől, és így tovább, akkor y nem szerepelhet a listánkon. Tehát nincs kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés $\mathbb{N}$ és $\mathbb{R}$ között, azaz $\mathbb{R}$ számossága, melyre a $2^{\aleph_0}$ jelölés használt, nagyobb mint $\aleph_0$. Tehát beláttuk a következő egyenlőtlenséget végtelen számosságok között:

$$\mathbb{N} \text{ számossága} = \aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \mathbb{R} \text{ számossága}.$$

Cantor elmélete alapján bármely két végtelen számosság összemérhető, és számosságok bármely (nem üres) rendszerében van legkisebb. Így van értelme az első nem megszámlálható számosságról beszélni, mely $\aleph_1$-gyel jelölt. A következő szigorúan nagyobb számosság $\aleph_2$-vel jelölt, utána $\aleph_3$, és így tovább.[1]

Van-e legnagyobb végtelen? Cantor definíciója szerint nincs. Bármilyen X halmaznak több részhalmaza van, mint eleme, azaz $\kappa < 2^\kappa$ ha κ számosság.

Tehát kaptunk egy szigorúan növő $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \dots$ sorozatot egyre nagyobb és nagyobb végtelen számosságokból. Felmerül a kérdés: hol is van $2^{\aleph_0}$ ebben a listában? Érdekes módon, ez *nem eldönthető*, legalábbis a matematikában általánosan elfogadott, úgynevezett ZFC axiómarendszert

[1]Az alefek listája itt nem áll meg: a természetes számokkal indexelt $\aleph_n$ számosságok szuprémuma $\aleph_\omega$, a következő eggyel nagyobb számosság $\aleph_{\omega+1}$, majd $\aleph_{\omega+2}$...

használva.[2] A matematika bizonyos modelljeiben $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, azaz $2^{\aleph_0}$ az első nem megszámlálható számosság: ekkor azt mondjuk, hogy a *Kontinuum Hipotézis* teljesül. Sok más érdekes modellben ez nem igaz, és vannak közbülső számosságok $\aleph_0$ és $2^{\aleph_0}$ között; sőt megmondhatjuk, hogy $2^{\aleph_0}$ hanyadik végtelen számosság legyen a listánkon: olyan ad hoc egyenlőségekre, mint $2^{\aleph_0} = \aleph_{16}$ is találhatunk egy modellt.

A következő egyszerű példa illusztrálja, hogy mit is jelent egy állítás függetlensége: $\mathbb{R}$ és $\mathbb{Q}$ mint algebrai struktúrák teljesítik az összeadás és szorzás axiómáit,[3] azonban az $x^2 = 2$ egyenletnek $\mathbb{Q}$-ban nincs megoldása, míg $\mathbb{R}$-ben kettő is van. Tehát az összeadás és szorzás axiómái nem döntik el, hogy az "$x^2 = 2$ egyenlet megoldható" állítás igaz vagy hamis-e. Míg a ZFC axiómarendszer azt eldönti, hogy a síkháromszögek belső szögeinek összege 180 fok, azt már nem dönti el, hogy $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ vagy $2^{\aleph_0} > \aleph_1$; valamelyik állítás teljesülni fog, de hogy melyik, az a konkrét modelltől függ.[4]

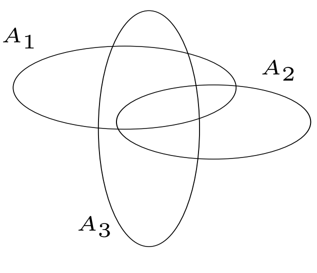
Hogy készülnek új modellek? Az 1960-as években Paul Cohen a semmiből robbant be a halmazelmélet élvonalába: ő bizonyította elsőként, hogy bizonyos modellekben $\aleph_1 < 2^{\aleph_0}$ lehetséges, megválaszolva Hilbert híres első problémáját. Technikájának, a *forszolásnak* az alapötlete meglepően egyszerű: ha M egy halmazelméleti modell, akkor konstruálhatunk egy nagyobb N modellt úgy, hogy hozzáadunk M-hez egy G *generikus objektumot*. A G generikussal megnövelhetjük $2^{\aleph_0}$ értékét ami a Kontinuum Hipotézis sérüléséhez vezet. Cohent 1966-ban Fields medállal jutalmazták halmazelméleti eredményeiért.

Az elmúlt ötven évben számos olyan érdekes és érdemben különböző modelljét konstruálták a matematikának amelyben vannak közbülső számosságok $\aleph_0$ és $2^{\aleph_0}$ között, és a modern halmazelmélet szignifikáns részben ilyen modellek vizsgálatával foglalkozik. Két modell, melyekben mondjuk $2^{\aleph_0} = \aleph_{16}$ ugyanúgy teljesül, viselkedhet nagyon különbözően, még csak az algebrát, mértékelméletet vagy topológiát tekintve is. Sokak meglepetésére, a szokásos axiómákat használva, például eldönthetetlennek bizonyult a Whitehead-probléma a csoportelméletben, vagy külső automorfizmusok létezése a Calkin-algebrán.[5]

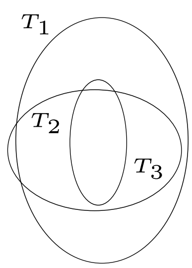
Ez motiválja, hogy egy finomabb kombinatorikus mértéket találjunk annál, minthogy egyedül $2^{\aleph_0}$ értékét, mely egyben $\mathbb{N}$ összes részhalmazainak száma is, vizsgáljuk. Ezzel a kérdéssel, és az $\aleph_0$ és $2^{\aleph_0}$ közötti számosságok vizsgálatával foglalkozik a *kontinuum számosság invariánsainak* elmélete.[6]

A terület egyik szépsége, hogy minimális előkészülettel is megérthetünk egy olyan új áttörő eredményt, mint amit Malliaris és Shelah beláttak. Mostantól csak természetes számokból álló halmazokkal foglalkozunk, és a következő, elsőre talán mesterségesnek tűnő kapcsolattal: ha A és B a természetes számok részhalmazai, akkor azt írjuk, hogy $A \subseteq^* B$, szóban A majdnem része B-nek, ha *A-nak véges sok kivétellel minden eleme B-ben is benne van.* Például, az $A = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$ halmaz majdnem része a $B = \{3, 4, 5 \dots\}$ halmaznak, hisz az $1, 2$ elemektől eltekintve B minden eleme A-ban is benne van.

Mi az előnye egy ilyen gyenge relációval dolgozni a valódi tartalmazás helyett? Legyen A_n azon pozitív egész számok halmaza, melyek egy fix n számmal oszthatóak: tehát $A_1 = \mathbb{N}$ az összes szám, A_2 a páros számok halmaza, $A_3 = \{3, 6, 9 \dots\}$, és így tovább. Könnyen látszik, hogy ha veszünk véges sok ilyen $A_1, A_2 \dots A_n$ halmazt egy fix n-ig, akkor ezeknek végtelen a metszete.[7]



Véges metszet tulajdonság

Torony


Ezt úgy is szoktuk mondani, hogy az $\{A_n\}$ halmazrendszer *véges metszet tulajdonságú.*

Persze olyan szám, ami az összes természetes számmal egyszerre osztható nincsen, azaz egyszerre nincs valódi metszete az összes $A_1, A_2, A_3 \dots$ halmaznak. Ezzel szemben olyan végtelen B halmazokat könnyen találunk, melyre $B \subseteq^* A_n$ minden n-re. Hiszen elég, ha odafigyelünk arra, hogy B-nek az n-dik elemét az $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ metszetből vegyük: konkrétan a $B = \{n! : n = 1, 2, 3 \dots\}$ választás például működni fog. Tehát a B halmaz lényegében az $\{A_n\}$ rendszer metszeteként viselkedik, és ezért *az $\{A_n\}$ rendszer pszeudometszetének* is nevezzük. Az is könnyen látszik, hogy B-t hozzáadva az $\{A_n\}$ rendszerhez a véges metszet tulajdonság még mindig teljesül.

[2] Azaz a Zermelo-Fraenkel axiómarendszer a kiválasztási axiómával ("Axiom of Choice") kiegészítve.

[3] Gondoljunk a felcserélhetőségre, zárójelezésre, vagy általában a *test axiómákra.*

[4] Ez a szituáció ugyancsak párhuzamban áll a modern, nem standard geometriák felfedezésével is a 19. században.

[5] A jelenleg ismert technikák fényében azonban nagyon valószínűtlen, hogy a híres Riemann-sejtés vagy a Navier-Stokes egyenletek általános megoldhatósága független lenne a ZFC axiómáktól. Az ezen problémák megoldásáért kiírt Millenium Prize jelenleg egymillió dollárral jár.

[6] Angolul "cardinal characteristics of the continuum".

[7] Persze, hiszen csak vegyük az $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ szorzat többszöröseit.

Ha van egy tetszőleges $\mathcal{A}$ halmazrendszerünk a véges metszet tulajdonsággal, akkor azt ki lehet terjeszteni egy maximális $\mathcal{A}_{\max}$ halmazrendszerré, ami még mindig véges metszet tulajdonságú.[8] Ekkor azonban az $\mathcal{A}_{\max}$ rendszernek már nem lehet pszeudometszete. Ez vezet első fő definíciónkhoz: a $\mathfrak{p}$ invariáns a legkisebb olyan rendszer számossága, ami véges metszet tulajdonságú, de nincs pszeudometszete. A $\mathfrak{p}$ számosságot *pszeudometszet számnak* nevezik.

A fenti példa keretében lényegében láttuk, hogy egy a természetes számokkal indexelt, azaz megszámlálható és véges metszet tulajdonságú rendszernek mindig van pszeudometszete, tehát $\mathfrak{p}$ nem megszámlálható. Azaz:

$$\aleph_0 < \mathfrak{p} \leq 2^{\aleph_0}.$$

Ismerünk számos olyan modellt, amelyben a $\mathfrak{p} = 2^{\aleph_0}$ egyenlőség teljesül (és ez a közös érték lényegében bármely alef lehet); másrészt, az $\aleph_1 = \mathfrak{p} < 2^{\aleph_0} = \aleph_2$ egyenlőtlenség is könnyen előfordulhat különböző modellekben. Tehát a szokásos axiómák nem döntik el, hogy hol van $\mathfrak{p}$ az $\aleph_1, \aleph_2, \ldots$ listában, sem azt, hogy $\mathfrak{p} = 2^{\aleph_0}$ vagy $\mathfrak{p} < 2^{\aleph_0}$ teljesül.

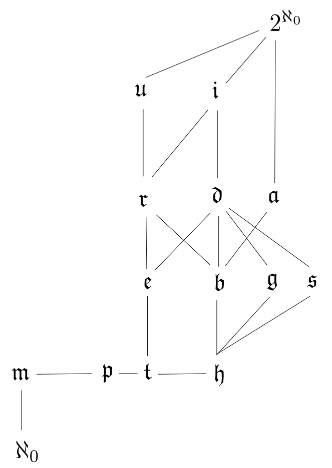
Szükségünk van még egy definícióra. Egy tipikus véges metszet tulajdonságú rendszerben semmi oka annak, hogy az elemek rendezve legyenek: az eredeti oszthatósági példánkban, ha csak p prímekre nézzük az A_p halmazokat, semelyik kettő nincs $\subseteq^*$ relációban. Tehát *toronynak* nevezünk egy olyan $\mathcal{T}$ rendszert, amelyben bármely két X, Y elemre vagy $X \subseteq^* Y$ vagy $Y \subseteq^* X$ teljesül. Más szóval, a $\subseteq^*$ reláció lineárisan rendezi $\mathcal{T}$-t. Az úgynevezett *toronyszám* $\mathfrak{t}$ a legkisebb $\mathcal{T}$ torony mérete, aminek nincs pszeudometszete.

Könnyű látni, hogy minden torony véges metszet tulajdonságú, tehát a $\mathfrak{p}$ invariánsra a tanú legfeljebb akkora mint $\mathfrak{t}$, és így a következő egyenlőtlenség teljesül:

$$\aleph_0 < \mathfrak{p} \leq \mathfrak{t} \leq 2^{\aleph_0}.$$

Nagy tornyok. Meglepő módon a megszámlálható $\mathbb{N}$ halmazban is lehet $2^{\aleph_0}$ méretű tornyot találni. Először is, soroljuk fel a racionális számokat mint $q_1, q_2, q_3 \ldots$. Ezután, minden valós r számra definiáljuk az X_r halmazt ami azon n természetes számokból áll, hogy $q_n < r$. Tehát X_r pont az r valós számnál kisebb racionális számok indexei. Ha $r < t$ két valós szám, akkor X_r teljesen része X_t-nek, sőt X_t végtelen sok extra elemet is tartalmaz. Tudunk egy pszeudometszetet mondani erre a rendszerre is?

A $\mathfrak{t}$ számosság értéke, $\mathfrak{p}$-hez hasonlóan, manipulálható különböző alefekre. Sőt, több mint egy tucat a $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{t}$-hez hasonló számosság invariánst vizsgáltak az 1940-es évek óta $\aleph_0$ és $2^{\aleph_0}$ között, és a legtöbbről tudtuk, hogy bizonyos egyszerű összefüggésektől eltekintve, melyek már a 20. század közepén ismertek voltak, más kapcsolat, egyenlőtlenség nem bizonyítható. Azaz, különböző forszolási technikák szofisztikált változataival és kombinációival pontosan beállíthatjuk nemcsak $2^{\aleph_0}$, hanem az invariánsok értékeiket is olyan előre fixált alefekre, melyek a rég ismert egyenlőtlenségeket nem sértik.[9]



Pár számosság invariáns és bizonyítható kapcsolatuk

A jelenlegi legerősebb eredények akár öt külön értéket is tudnak egyszerre manipulálni.

Mindezek ellenére, az elmúlt hatvan évben nem sikerült olyan modellt konstruálni, melyben $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{t}$ ne lett volna egyenlő. Ugyanakkor, az általánosan elfogadott sejtés szerint $\mathfrak{p} < \mathfrak{t}$ lehetségesnek látszott, bár azt tudtuk, hogy technikailag nem lehet könnyű egy ilyen bizonyítás: régóta ismert, hogy ha $\mathfrak{p} = \aleph_1$, akkor $\mathfrak{t} = \aleph_1$ is teljesül. Tehát $\mathfrak{p} < \mathfrak{t}$ csak úgy lehetséges, ha $2^{\aleph_0}$ nagyobb mint $\aleph_2$, azonban ilyen modellek finomhangolása sokkal nehezebb feladat, mint amikor $2^{\aleph_0} \leq \aleph_2$.

Malliaris és Shelah új, váratlan tétele azt mondja ki, hogy

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{t}$$

függetlenül attól, hogy milyen modellben vagyunk. Mit is kellett belátniuk a szerzőknek? Mivel $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{t}$ ismert volt, ezért a $\mathfrak{t} \leq \mathfrak{p}$ összefüggésre volt szükség: azaz, ha van egy tetszőleges véges metszet tulajdonságú $\mathcal{A}$ rendszerünk, aminek nincs pszeudometszete, akkor akármilyen bonyolult vagy véletlen átfedések is vannak $\mathcal{A}$ elemei között, valamilyen módon konstruálhatunk egy legfeljebb akkora $\mathcal{T}$ tornyot pszeudometszet nélkül, amiben tehát az elemek már rendezve vannak a $\subseteq^*$ relációval. A naiv ötlet, hogy $\mathcal{A}$ elemeiből próbáljunk tornyot építeni hamar megbukik, hiszen lehet, hogy $\mathcal{A}$ semelyik két eleme nincs $\subseteq^*$ relációban.

[8]Ez a Zorn-lemma egy klasszikus alkalmazása.

[9]További részletekért számosság invariánsokról, klasszikus eredményekről A. Blass [1] áttekintését javasoljuk.

Malliaris és Shelah eredménye ahhoz hasonlítható, mintha belátnánk két egyenletről, hogy ugyanaz a megoldásuk, de anélkül, hogy valójában megtalálnánk, hogy mi is ez a közös érték. A ZFC axiómák nem döntik el, hogy éppen $\mathfrak{p} = \aleph_1$ vagy $\mathfrak{p} = \aleph_2$ vagy $\mathfrak{p} = \aleph_3$, és hasonlóan $\mathfrak{t}$ értéke sem eldönthető. Viszont, azt már be lehet látni, hogy bármi is $\mathfrak{p}$ értéke, $\mathfrak{t}$ vele egyenlő lesz.

Meg kell említenünk, hogy a szerzők nemcsak, hogy megoldották $\mathfrak{p}$ és $\mathfrak{t}$ hatvan éve nyitott problémáját, de egy teljesen új kapcsolatot fedtek fel egy modellelméleti komplexitás hierarchia, a Keisler-rendezés struktúrája, és a számosság invariánsok elmélete között [6, 7, 8]; ezen eredmények vázolása azonban túlmutat jelen cikkünk keretein. Míg az eredeti bizonyítás a $\mathfrak{p} = \mathfrak{t}$ egyenlőségre komoly halmaz-és modellelméleti eszközöket használ,[10] olyan variánsok már elérhetőek, melyek csak alapvető ismereteket és egy kis kitartást igényelnek [9].

Egy nyitott probléma. Azt mondjuk, hogy egy rendszer $\mathcal{R}$ *szétvághatatlan* ha nincs olyan Y halmaz ami minden X-et $\mathcal{R}$-ből egyszerre szétvág, azaz a metszet $X \cap Y$ és a különbség $X - Y$ mind végtelenek. Legyen $\mathfrak{r}$ a legkisebb szétvághatatlan rendszer mérete. Továbbá legyen $\mathfrak{r}_\sigma$ (ejtsd 'er szigma') a legkisebb olyan rendszer mérete, amit megszámlálható sok $Y_0, Y_1, \ldots$ halmazzal sem lehet szétvágni. Könnyen látszik, hogy $\aleph_0 < \mathfrak{r} \leq \mathfrak{r}_\sigma \leq 2^{\aleph_0}$, azonban nem tudjuk, hogy $\mathfrak{r} < \mathfrak{r}_\sigma$ lehetséges-e. A szakértők sejtése, hogy valójában $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_\sigma$, és ez eddig minden általunk ismert modellben teljesülni látszik [3].

Malliaris és Shelah eredménye távolról sem zárja le a számosság invariánsok elméletét, sőt cikkeik valószínűleg számos új vizsgálat kezdőpontjai. Milyen számosság invariáns kérdéseken dolgozik eközben egy hétköznapi halmazelmélész? Egy felől, bizonyos rég ismert invariánsok kapcsolata a mai napig eldöntetlen (egy ilyen kérdést említünk a kiemelésben) [3]. Másrészt, napjainkig definiálnak új, érdekes számosság invariánsokat, melyek elhelyezése a klasszikus invariánsok diagramjában sokszor meglehetősen nehéz feladat [2]. Végül, egy igen gazdag terület van kibontakozóban olyan számosságinvariánsokról, melyek $\mathbb{N}$ részhalmazai helyett, valamely nem megszámlálható számosság részhalmazait tekintik [4].

Zárásként, pár szó a főszereplőkről: Maryanthe Malliaris a Berkeley-n szerezte doktoriját 2009-ben, és jelenleg a University of Chicago professzora. A fiatal matematikusnő számos díjat nyert korábbi munkáiért is, és a 2018-as Nemzetközi Matematikai Kongresszus meghívott előadója.

Saharon Shelah neve sokaknak ismerős lehetett: a 72 éves matematikus 1023 publikált cikk szerzője (!), és komoly áttöréseket ért el a véges és végtelen kombinatorika, a modellelmélet, logika, és a csoportelmélet terén. A mai napig heti hat napot dolgozik, a tanévet megosztva a Rutgers, illetve a jeruzsálemi Héber Egyetemen között.

A cikk részben az FWF Grant I1921 támogatásával készült. Köszönjük Bottyán Emese, Soukup Lajos, Vidnyánszky Zoltán és Zádorvölgyi Zita javaslatait a cikkel kapcsolatban.

Referenciák

[1] A. Blass. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum. *Handbook of set theory*, pages 395–489, 2010.
[2] A. Blass, J. Brendle, W. Brian, J. D. Hamkins, M. Hardy, and P. B. Larson. The rearrangement number. *arXiv preprint:1612.07830*, 2016.
[3] J. Brendle. Around splitting and reaping. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 39(2):269–279, 1998.
[4] J. Brendle, A. Brooke-Taylor, S.-D. Friedman, and D. Montoya. Cichon's diagram for uncountable cardinals. *to appear in Israel Journal of Mathematics, arXiv:1611.08140*, 2016.
[5] G. Galilei. *Dialogue concerning the two chief world systems, Ptolemaic & Copernican.* Univ of California Press, 1967.
[6] M. Malliaris and S. Shelah. General topology meets model theory, on $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{t}$. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(33):13300–13305, 2013.
[7] M. Malliaris and S. Shelah. Cofinality spectrum theorems in model theory, set theory, and general topology. *Journal of the American Mathematical Society*, 29(1):237–297, 2016.
[8] J. T. Moore. Model theory and the cardinal numbers $\mathfrak{p}$ and $\mathfrak{t}$. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110(33):13238–13239, 2013.
[9] G. M. Roccasalvo. Ultraproducts of finite partial orders and some of their applications in model theory and set theory. Master's thesis, University of Torino, 2014.

(D.T. Soukup) Universität Wien, Kurt Gödel Research Center for Mathematical Logic, Austria
E-mail address, Corresponding author: `daniel.soukup@univie.ac.at`
URL: `http://www.logic.univie.ac.at/~soukupd73/`

[10] A Fields medállal kitüntetett Timothy Gowers egy blog bejegyzése is foglalkozik ezzel a kérdéssel, link itt.